



Rabil Ayazoğlu Mashiyev

Bayburt University, rayazoglu@bayburt.edu.tr, Bayburt-Turkey

Sezgin Akbulut

Atatürk University, sezginakbulut@atauni.edu.tr, Erzurum-Turkey

Ebubekir Akkoyunlu

Bayburt University, eakkoyunlu@bayburt.edu.tr, Bayburt-Turkey

DOI	http://dx.doi.org/10.12739/NWSA.2018.13.3.1A0410	
ORCID ID	0000-0003-4493-2937	0000-0001-5299-8587
	0000-0003-2989-4151	
CORRESPONDING AUTHOR	Ebubekir Akkoyunlu	

STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU DENKLEMLERİN MÜHENDİSLİKTEKİ UYGULAMALARI
ÖZ

Fizik alanında ve mühendislik uygulamalarında birçok materyal ve problem klasik Lebesgue (L^p) ve klasik Sobolev ($W^{m,p}$) uzayları kullanılarak yeterli doğrulukla matematiksel olarak modellenebilir. Ancak bazı nonhomojen materyallerin etkin enerjisinin doğru şekilde ifade edilebilmesi için p üssünün değişken olması gerekir. Bu tür problemlerin çözümleri yalnız değişken üslü Lebesgue ($L^{p(x)}$) ve Sobolev ($W^{m,p(x)}$) uzaylarında mümkündür. Bundan dolayı son yıllarda, $p(x)$ -Laplacian içeren standart olmayan büyüme koşullu ($p(x)$ büyüme koşullu) kısmi diferansiyel denklemlere ve varyasyonel integrallere olan ilgi artmıştır. $p(x)$ -Laplacian içeren standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerin uygulama alanlarından bazıları electrorheolojik akışkanlar teorisi, lineer olmayan esneklik teorisi, görüntü iyileştirme ve gözenekli ortamlarda akışdır. Bunlar içerisinde en önemlisi robot ve uzay teknolojisinde de kullanılan (araştırmaları çoğunlukla Amerika'da ve özellikle NASA laboratuvarlarında yapılan) electrorheolojik akışkanlar (ER akışkanlar) teorisidir. Bu sunumumuzda uygulamalı bilimlerde (özellikle mühendislikte) önemli bir yere sahip olan $p(x)$ -Laplacian içeren standart olmayan büyüme koşullu kısmi diferansiyel denklemler ve varyasyonel integrallerle ilgili çalışmalar hakkında bilgi verilecektir.

Anahtar Kelimeler: $p(x)$ -Laplacian, Standart Olmayan Büyüme Koşulu, Varyasyonel İntegral, Lebesgue, Sobolev

THE APPLICATIONS IN ENGINEERING OF EQUATIONS WITH NON-STANDARD GROWTH CONDITIONAL

ABSTRACT

Many materials and problems in physics and engineering applications can be mathematically modeled with sufficient accuracy using classical Lebesgue (L^p) and classical Sobolev ($W^{m,p}$) spaces. However, p must be variable in order to be expressed correctly the underlying energy of some nonhomogeneous materials. Such problems can be solved only in the variable-exponent Lebesgue ($L^{p(x)}$) and Sobolev ($W^{m,p(x)}$) spaces. Therefore, in recent years, the interest to partial differential equations with non-standard growth conditional involving $p(x)$ -Laplacian (with $p(x)$ growth conditional) and variational integrals have been increased. Electrorheological Fluids Theory, Nonlinear Elasticity Theory, Image Processing, Flow in Porous Media are some of the application areas in engineering of non-standard growth conditional differential equations involving $p(x)$ -Laplacian. Especially Electrorheological fluids have been used in robotics and space technology (The Research is mostly done in America and especially in NASA laboratories) have significant importance. In this presentation, we provide information on variational integrals and on nonstandard growth-conditional partial differential equations involving $p(x)$ -Laplacian, which has an important role in applied sciences (especially in engineering).

Keywords: $p(x)$ -Laplacian, Non-Standard Growth Condition, Variational Integral, Lebesgue, Sobolev

How to Cite:

Mashiyev Ayazoğlu, R., Akbulut, S. ve Akkoyunlu, E., (2018). Standart Olmayan Büyüme Koşullu Denklemlerin Mühendislikteki Uygulamaları, Engineering Sciences (NWSAENS), 13(3): 167-179, DOI: 10.12739/NWSA.2018.13.3.1A0410.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Değişken üslü Lebesgue ($L^{p(x)}$) ve Değişken üslü Sobolev ($W^{m,p(x)}$) ($p(x)$ ölçülebilir pozitif gerçel değerli bir fonksiyon, $m > 0, m \in \mathbb{Z}$) uzayları literatürde ilk defa, Orlicz [25] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada aşağıdaki soru göz önüne alınmıştır: (p_k) ve (x_k) dizileri $\sum x_k^{p_k}$ yakınsak olacak şekilde reel sayıların iki dizisi olsun. Bu halde $\sum x_k y_k$ serisinin yakınsak olması için y_k üzerindeki gerek ve yeter koşullar nelerdir? Bu soruya yanıt, en az bir $\lambda > 0$ ve $p_k^l = \frac{p_k}{p_k - 1}$ için $\sum (\lambda y_k)^{p_k^l}$ serisinin yakınsak olması gerektiği ortaya çıkmaktadır. Orlicz aynı zamanda değişken üslü Lebesgue uzayını reel aralıkta göz önüne almıştır ve bu uzayda Hölder eşitsizliğini ispatlamıştır.

Reel aralıkta değişken üslü Lebesgue uzayları, özellikle Tsenov [34] ve Sharapudinov [32] başta olmak üzere Rus araştırmacılar tarafından geliştirilmiştir.

Değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının araştırılmasında bir sonraki büyük adım 90'lı yılların başlarında Kováčik ve Rákosník [18] tarafından atılmıştır. Bu makalede \mathbb{R}^N de değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının birçok temel özelliği ifade edilmiştir.

Bu makaleden sonra uzun bir süre herhangi bir çalışma gözlenmemiştir. Son yıllarda çeşitli gelişmeler, değişken üslü uzayların sistematik ve yoğun biçimde incelenmesine yol açmıştır. Bu doğrultuda ilk önce değişken üslü uzaylarla standart olmayan büyüme koşulu ve coercive'lik özelliğine sahip varyasyonel integraller arasında ilişki kurulmuş ardından bu varyasyonel problemlerle electrorheolojik (ER) akışkanların matematiksel modellemesi arasındaki ilişki farkedilmiştir. Daha sonra varyasyonel integrallerle gözenekli ortamlarda akış (flow in porous media) ve lineer olmayan esneklik teorisi (nonlinear elasticity theory) gibi farklı fiziksel durumlarla da bağlantı kurulmuştur [3 ve 38]. Bundan dolayı değişken üslü Lebesgue ($L^{p(x)}(\Omega)$) ve değişken üslü Sobolev ($W^{m,p(x)}(\Omega)$) uzayları fen ve mühendislik alanındaki uygulamaları ile her geçen gün önemi artan ve birçok yazar tarafından çalışılan bir alan haline gelmiştir. Bu uzaylarla ilgili detaylı bilgilere ulaşmak için [12, 18 ve 32] kaynaklarını incelemeniz tavsiye edilir.

- **Tanım 1:** Ω, \mathbb{R}^N de açık bir bölge, $|\Omega| > 0$ ve $S(\Omega) = \{u \in \Omega: u, \Omega$ da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi} olsun. $p(x): \Omega \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p^- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) < p^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x) < \infty$ olmak üzere

$$L^{p(x)}(\Omega) := \left\{ u \in S(\Omega): \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **Değişken Üslü Lebesgue Uzayı** denir [12]. p nin sabit ($p(x) = p$) olması durumunda değişken üslü Lebesgue uzayı, klasik Lebesgue uzayına dönüşür.

- **Tanım 2:** Ω, \mathbb{R}^N de açık bir bölge ve $m \geq 0, m \in \mathbb{Z}$ olsun. $|a| \leq m$ özellikli her α -çoklu indisi için Ω bölgesinde tanımlı $D^\alpha(u) \in L^{p(x)}(\Omega)$ şeklindeki tüm u fonksiyonlarının sınıfına **Değişken Üslü Sobolev Uzayı** adı verilir ve

$$W^{m,p(x)}(\Omega) := \{u \in L^{p(x)}(\Omega): D^\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega), |a| \leq m\}$$

şeklinde yazılabilir [12]. p nin sabit ($p(x) = p$) olması durumunda değişken üslü Sobolev uzayı, klasik Sobolev uzayına dönüşür.

- **Tanım 3:** $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü olsun. $V_\Pi(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ ve $V_a^b(f) = \sup_\Pi V_\Pi(f)$ olmak üzere $V_a^b(f)$ değeri $[a, b]$ üzerinde f fonksiyonunun

toplam varyasyonu (total variation) olarak isimlendirilir. Eğer $V_a^b(f)$ sonlu ise $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyon (bounded variation) denir [13].

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICANCE)

Teknolojinin hızla ilerlediği günümüzde mühendislikle ilgili uygulamalarda matematik önemli bir yer tutmaktadır. Yapılan bu çalışma ile değişken üslü uzaylarda yapılan çalışmaların mühendislik alanındaki katkıları ifade edilerek mühendislik alanında yapılan çalışmalardaki değişken üslü uzayların önemi belirtilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT (MATERIAL AND METHOD)

Çalışmamızda ER akışkanlar, imaj iyileştirme, ısı problemlerine ait değişken üslü uzaylarda yapılan çalışmalarla ilgili literatür taraması yapılarak bir çalışma derlenmiştir.

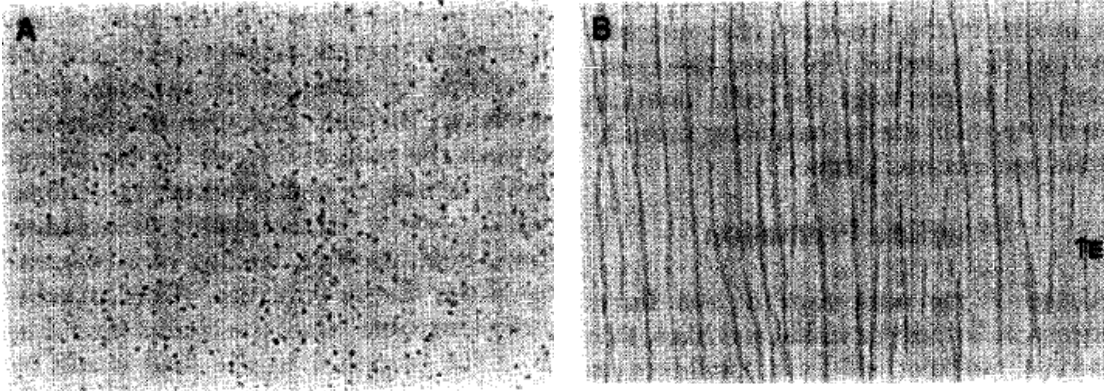
3.1. Değişken Üslü Lebesgue ve Sobolev Uzaylarda

Electroreheolojik (ER) Akışkanlarla İlgili Uygulamalar

(The Applications Related to Electro-Rheological (ER)

Fluids in Variable Exponent Lebesgue and Sobolev Spaces)

Non-Newtonian akışkan olarak da bilinen ER akışkanlara karşılık gelen matematiksel modeller, standart olmayan büyüme koşullu denklem türünden olup, bu tip denklemlerle ilgili çalışmalar içerisinde ayrı bir öneme sahiptir. Electroreheolojik (ER) akışkanlar, iletkenlik özelliği olmayan akışkanların içine küçük parçacıklara ayrılmış polarize olabilen taneciklerin eklenmesiyle oluşturulurlar. Elektrotlar arasından akan böyle bir karışıma dışarıdan elektrik alan uygulandığında katı hale geçebilme, elektrik alan uzaklaştırıldığında ise çok kısa bir sürede (birkaç milisaniye kadar kısa olabilir) sıvı hale geçebilme gibi akışkanın reolojik davranışlarında büyük oranda tersinir (kimyasal, fiziksel ve mekanik olarak geri dönüştürülebilir) değişiklikler meydana gelir. Elektrik alanlar bu sıvılara uygulandığında, uygulanan alana paralel olarak lifli yapılar oluşturularak tepki verirler (Şekil 1).



Şekil 1. a) Elektrik alan yokluğunda izotropik süspansiyon,
b) Elektrik alanındaki fibrillenmiş yapılar [15]

(Figure 1. a) Isotropic suspension in the absence of an electric field, b) Fibrillated structures in an electric field [15])

ER akışkanlar teorisiyle ilgili ilk önemli bilgilere Winslow [37] makalesinde rastlanmaktadır. Bu akışkanların kendi içlerindeki bağıl devinime gösterdikleri direnme özelliği (viscosity) akışkana uygulanan elektrik alanına bağlıdır. Winslow, bu akışkanlarda bir elektrik alanındaki viscosity'nin, alanın kuvveti ile ters orantılı

olduğunu tespit etmiştir. Bu olay Winslow etkisi olarak bilinir. Elektroeheoloji olayı uzun yıllardır bilinmektedir, fakat son yıllarda bu akışkanlara olan ilgi daha da artmıştır. Günümüzde ER akışkanlar amortisörler, otomobil subapları, debriyajlar, damperler, hidrolik ve robot sistemleri gibi farklı alanlarda kullanılmaktadır. Ayrıca ER akışkanların kumaşın içine derinlemesine işleme ve kumaşın normal durumundan çok daha katı (dayanıklı) hale çok hızlı bir şekilde dönüşmesi özelliklerinden faydalanarak şu ankinden çok daha hafif olan kurşun geçirmez yelekler üretilmesi amaçlanmaktadır. Bununla birlikte ER akışkanların, sarılabılır/döndürülebilir ekranlar ve keypadler ile birlikte kullanılarak ihtiyaç halinde katı hale getirilebilen, ihtiyaç olmadığında ise esnekleşerek sarılabılır/döndürülebilir hale getirilebilen esnek elektronik cihazlar üretimi için de kullanılabilirdiği öngörülmektedir.

Elektroeheolojik akışkanlar birçok farklı şekilde modellenebilir. Bu modellerlere ait yaklaşımlardan biri, malzemenin gözle görülebilir bir çeşidini elde etmek için altta yatan mikro yapının incelenmesidir [9, 14, 17 ve 26]. Bir başka yaklaşımda, devamlılık mekaniğinin framework özelliği yardımıyla electrorheological sıvı homojenleştirilmiş tek bir parça olarak ele alınarak [4, 27 ve 36] veya karışım teorisi kullanılarak [28] modelleme yapılmıştır. Başka bir modelleme olan, parçacıkların dinamikleri ve etkileşimi göz önüne alınarak doğrudan sayısal benzetimlere dayanan modelleme ile tamamen farklı bir bakış açısı sağlanmıştır [6 ve 35]. Tüm bu modellerde elektrik alan sabit bir parametre olarak ele alınır. Rajagopal ve Růžička [29] elektromanyetik alanların ve hareketli sıvının karmaşık etkileşimini hesaba katan bir model geliştirdiler ve elektrik alanını belirlenmesi gereken bir değişken olarak ele aldılar. Ardından M. Růžička [31], bu modeli geliştirerek electroeheolojik akışkanlar (EA) için katsayıları değişken büyüme oranlı doğrusal olmayan sistem içeren farklı bir matematiksel model üzerinde çalışmıştır. Elektromanyetik alanlar ile hareketli akışkanlar arasındaki etkileşimi ifade eden bu model (1) de verilmiştir;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}S(u) + (u \cdot \nabla)u + \nabla\pi = f \quad (1)$$

Bu modellemede $u: R^{3+1} \rightarrow R^3$, akışkanın hızını veren fonksiyonu; $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, gradient operatörünü; $\pi: R^{3+1} \rightarrow R$, basınç fonksiyonunu; $f: R^{3+1} \rightarrow R^3$, harici kuvvetleri temsil eden fonksiyonu gösterir. $S: W_{loc}^{1,1} \rightarrow R^{3 \times 3}$ fonksiyonu

$$S(u)(x) = \mu(x)(1 + |Du(x)|^2)^{\frac{p(x)-2}{2}} Du(x) \quad (2)$$

olarak ifade edilen ekstra stres tensörüdür. (2)'de yer alan $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$, u fonksiyonunun gradientinin simetrik kısmı ve μ bir ağırlık fonksiyonudur. Yukarıda (2) ile verilen stres tensöründe p üssü, fonksiyon (değişken) olarak alınmıştır. (1) denklemi bilinen Laplace denklemlerinden daha karmaşık olmasına rağmen, en yüksek mertebeden türe ve sahip terim için, $\lambda = 1$ olarak alındığında elde edilen

$$\text{div} \left((\lambda + |Du(x)|^2)^{(p(x)-2)/2} Du(x) \right) \quad (3)$$

ifadesi $p(x)$ -Laplace denkleminin çok benzeridir. (3) denkleminde $\lambda = 0$ alındığında $\Delta_{p(x)} u = \text{div} \left(|\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x) \right) = 0$ şeklindeki $p(x)$ -Laplace denkleminin dönüşür.

ER akışkanlar belirli bir manyetik alanla karşılaştıklarında bu akışkanların parçacıkları hareket esnasında belli bir miktar kütle kaybına uğramaktadırlar. Kaybolan bu kütle miktarını p kuvveti sabit iken $x \in \mathbb{R}^N$ 'nin farklı eksenlerdeki hareketleri boyunca eşit kabul

etmek zorunluluğu ortaya çıkmakta ve dolayısıyla bu farklı kütle kayıpları hesaba katılamamaktadır. Kaybolan bu kütle miktarını bu şekilde eşit kabul etmek ise bazı fizik, mekanik ve özellikle ER akışkanlarla ilgili problemlere karşılık gelen matematiksel modellerin yeterli doğrulukta oluşturulamamasına sebep olmaktadır. Ancak; p kuvveti $p(x)$ şeklinde ölçülebilir pozitif reel değerli bir fonksiyon şeklinde seçilirse, $x \in \mathbb{R}^N$ 'nin farklı eksenlerdeki hareketleri boyunca ortaya çıkan farklı kütle kayıpları hesaba katılabilmekte bu da matematiksel modellerin yeterli doğrulukta oluşturulabilmesine imkân vermektedir. Dolayısıyla, ER akışkanlar teorisinden kaynaklanan standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemlere karşılık gelen matematiksel modeller ancak değişken üslü Lebesgue ve değişken üslü Sobolev uzaylarda oluşturulabilir ve incelenebilirler.

ER akışkanlarda Du , u hız alanının gradientinin simetrik kısmını ve p elektrik alanına bağlı materyal fonksiyonu göstermek üzere, altta yer alan enerjisi (etkin enerji) $\int_{\Omega} |Du|^{p(x)} dx$ ile verilir. (1) ile verilen modellemede p sabit iken etkin enerji $\int_{\Omega} |Du|^p dx$ ile ifade edilir. Bu durumda (2)'deki stres tensöründe her bir $x \in \mathbb{R}^N$ için p kuvvetinin alacağı değerler eşit kabul edilir. Böyle denklemler klasik Lebesgue (L^p) ve klasik Sobolev uzayları ($W^{m,p}$) kullanarak yeterli doğrulukla oluşturulabilir. Ancak; p kuvveti ölçülebilir pozitif gerçel değerli bir fonksiyon olarak seçildiğinde etkin enerji $\int_{\Omega} |Du|^{p(x)} dx$ ile ifade edilir. Bu durumda stres tensöründe her bir $x \in \mathbb{R}^N$ için p kuvvetinin alacağı değerler farklı olur. Her bir $x \in \mathbb{R}^N$ için p kuvvetinin alacağı değerlerin farklı olması non-homojen materyallerin doğal yapısıyla uyumluluk gösterir. Her bir $x \in \mathbb{R}^N$ için p kuvvetinin alacağı değerlerin farklı olması durumunda klasik Lebesgue ve klasik Sobolev uzayları yetersiz kalır. Dolayısıyla değişken üslü Lebesgue ve değişken üslü Sobolev uzaylarına ($L^{p(x)}(\Omega)$ ve $W^{m,p(x)}(\Omega)$) ihtiyaç duyulur.

Aşağıda ER akışkanlar ile ilgili değişken üslü uzaylarda şimdiye kadar yayınlanmış bazı önemli çalışmalara yer verilmiştir.

Mihăilescu ve Rădulescu [23], $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) düzgün sınırlı bir bölge, $\text{div}(a(x, \nabla u))$ $p(x)$ -Laplace tipi operatör, $1 < \beta < \gamma < \inf_{x \in \Omega} p(x)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} -\text{div}(a(x, \nabla u)) = \lambda(u^{\gamma-1} - u^{\beta-1}), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına ve nonstandart büyüme koşuluna sahip denklemi inceleyerek, varyasyonel yaklaşım ve Mountain Pass teoremini kullanıp yeterince büyük λ mevcut ise negatif olmayan en az iki çözümünün olduğunu göstermiştir.

Mihăilescu [22], $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) silindirik simetriye sahip sınırlı bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p \in C(\bar{\Omega})$ ve $g(x, u)$ gerçel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u(x) = -\text{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = g(x, u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına ve nonstandart büyüme koşuluna sahip lineer olmayan eliptik denklemi inceleyerek, $g(x, u) = h(x)|u(x)|^{q(x)-2} u$ ve $g(x, u) = h(x)|u(x)|^{q(x)-2} u + f(x, u)$ özel durumları için varyasyonel bir yaklaşımla Ekeland Varyasyonel prensibini ve Mountain Pass teoremini kullanıp, denklemin Superlineer durumunu inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu göstermiştir.

Ayazoğlu ve Ekinçioğlu [5], $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınırlı bir bölge, $\forall x \in \bar{\Omega}$ için $p(x) < N$ ve f bazı şartları sağlayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u = f(x, u, |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşulu altındaki quasilineer eliptik denklemin Mountain Pass tekniğine dayalı iterasyon tekniklerini kullanarak pozitif çözümlerini elde ettiler.

Acerbi ve Mingione [2], $\varepsilon(u)$, Du gradientinin simetrik kısmı ve $p(x)$, $\frac{3n}{n+2}$ den büyük Hölder sürekli değişken üs olmak üzere

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left((1 + |\varepsilon(u)|^2)^{(p(x)-2)/2}\varepsilon(u)\right) + D\pi = f(x, u, Du), & x \in \Omega \\ \operatorname{div}u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

sabit durumdaki elektorolojik akışkanları modelleyen sistemlerin zayıf çözümleri için düzenlilik sonuçlarını kanıtladılar.

3.2. Değişken Üslü Lebesgue ve Sobolev Uzaylarda İmaj İyileştirme İşlemleri (Image Processing in Variable Exponent Lebesgue and Sobolev Spaces)

Değişken üslü uzayın önemini imaj iyileştirme işleminin matematiksel modellemesinde de görebiliyoruz. İmaj iyileştirme üzerine yapılan çalışmalarda özellikle gürültüden (görüntüyü kirleten ve görüntü kalitesini düşüren harici kaynaklardan oluşan etki) dolayı ortaya çıkan bazı eksikliklerin giderilebilmesi için değişken üslü uzaylarda yapılan çalışmalar mevcuttur [7, 11 ve 20]. İmaj iyileştirmedeki değişken üssün rolünü anlamak için, öncelikle klasik uzaylarda çalışılan toplam varyasyon (TV) temelli difüzyon, izotropik difüzyon ve izotropik olmayan difüzyon tiplerinin varyasyonel formülasyonları ile bu işlemlerin avantaj/dejavantajları hakkında bilgiler verelim.

3.2.1. Toplam Varyasyon Düzgünleştirme İşlemi (TV Temelli Difüzyon) (Total Variation Smoothing Process (TV-based Diffusion))

Toplam varyasyon düzgünleştirme işlemi;

$$\min \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^p + \frac{\lambda}{2} |u(x) - I(x)|^2 \right) dx \quad (4)$$

(4)'deki p değeri 1 olarak alındığında elde edilen minimize işlemidir. Burada λ düzgünleştirmenin güçlüğüne işaret eden bir parametreyi, u gerçek görüntüyü, η istenmeyen noktacıklar (noise) tarafından bozulmuş gri (bulanık) alanları, Ω düzlemdeki dikdörtgensel bölgeyi, I ise $I = u + \eta$ (u = gerçek görüntü, η = gürültü) fonksiyoneli temsil eder.

İlk olarak Rudin, Osher and Fatemi [30] tarafından önerilen yaygın olarak Rudin-Osher-Fatemi (ROF) modeli olarak da bilinen TV-temelli düzgünleştirme işlemi görüntüleri yeniden oluştururken kenarları korumak için mükemmel bir iş çıkarır. Bu işlemde kenarların yeniden oluşturulması için gerekli olan süreksizliklere izin verilir. Ancak bu yöntem uygulandığında orijinal görüntüde bulunmayan yeni kenarlar meydana gelir. TV temelli difüzyon keskin kenarları yeniden yapılındırır, ancak bu işlemin merdiven çıkarma etkisi mevcuttur. Yani TV temelli düzgünleştirme işlemi, parçalı sabit olan çözümleri desteklemektedir fakat bu bazen gürültülü pürüzsüz bölgeler parçalı sabit bölgelere işlenirken bir merdiven etkisi yaratır (Şekil 5'e bakınız). Bu da sahte kenarlar oluşturarak görüntünün yanlış bölümlenmesine neden olabilir. TV tabanlı difüzyonun görüntüleri yeniden oluştururken kenarları koruma özelliğinden dolayı bu modelleme üzerindeki bazı değişiklikler ile çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Örneğin Strong ve Chan [33] TV modeline uyan, $\alpha(x)$ muhtemel kenarlardaki difüzyonu yavaşlatan kontrol fonksiyonu olmak üzere,

$$\min \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla u| dx \quad (5)$$

modelini ileri sürdüler. Bu modelleme ile gürültü azaltma konusunda iyi sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca difüzyonun tipi orijinal TV modeliyle aynı olduğu için kenarların yeniden yapılandırılması içinde kullanışlıdır.

3.2.2. İzotropik (Gauss) Difüzyon İşlemi (Isotropic Diffusion Process)

İzotropik düzgünleştirme işlemi, (4)'deki p değeri 2 olarak alındığında elde edilen minimize işlemidir. Bu işlem $W^{1,2}(\Omega)$ Sobolev uzayında gerçekleşir. İzotropik difüzyon, basamak problemini çözen ancak kenarları korumak için hiçbir mekanizması olmadığından dolayı tek başına görüntüyü yeniden yapılandırmada iyi olmayan difüzyondur. İzotropik difüzyon pürüzsüz bölgeleri yeniden yapılandırır, ancak kenarları ciddi derecede bulanıktır.

3.2.3. Anizotropik Difüzyon İşlemi (Anisotropic Diffusion Process)

$1 < p < 2$ farklı değerler seçimi (p , 1 ile 2 aralığında sabit bir değer), TV tabanlı ve izotropik düzgünleştirme arasında bir yerde olan anizotropik difüzyon ile sonuçlanır. Bu tür difüzyon, parçalı pürüzsüz bölgeleri yeniden oluşturmakta etkili olabilir. Ancak, sabit bir $1 < p < 2$ değeri, süreksizliklere izin vermeyebilir, bu nedenle kenarları yok eder. M. Nikolova [24] tarafından yapılan çalışmada bunun doğru olduğu gösterilmiştir.

3.2.4. TV Temelli ve İzotropik Difüzyonun Kombinasyonu (Combination of TV-Based and Isotropic Diffusion)

p 'nin farklı değerleri için (4) ile tarif edilen minimize işleminin güçlü yanları göz önüne alındığında, her difüzyon türünün avantajlarından yararlanmak için kendini ayarlayabilen bir modeli araştırmak faydalıdır. Bu amaçla, Chambolle ve Lions [10], İzotropik ve TV tabanlı difüzyonu bir araya getiren (6)'da yer alan enerji işlevselliğini en aza indirmeyi ileri sürdü.

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \frac{1}{2\beta} \int_{|\nabla u| \leq \beta} |\nabla u|^2 dx + \int_{|\nabla u| > \beta} \left(|\nabla u| - \frac{\beta}{2} \right) dx \quad (6)$$

Bu modelde $|\nabla u| > \beta$ iken yani kenarların büyük olasılıkla bulunduğu yerde difüzyon TV-temelli, $|\nabla u| \leq \beta$ iken izotropiktir. Bu model homojen bölgelerin farklı kenarlarla ayrıldığı görüntülerin geri kazanılmasında başarılıdır. Ancak, nesnelere temsil eden görüntü yoğunlukları düzensizse, veya bir görüntü çok bozulmuşsa bu model β eşliğine hassas hale gelebilir. Bu durumda, difüzyonun yönünü ve hızını seçerken daha fazla esneklik isteyebilir.

p 'nin farklı değerlerinin avantajlarını birleştirmek amacıyla bu farklı değerleri değişken bir üs ile yazarak imaj iyileştirme üzerine değişken üslü uzaylarda çalışmalar yapılmıştır. Şimdi bu uzaylarda yapılmış çalışmalar hakkında bilgiler verelim.

Blomgren ve ark. [7] makalelerinde $\lim_{s \rightarrow 0} p(s) = 2$, $\lim_{s \rightarrow \infty} p(s) = 1$ ve p monoton azalan olmak üzere (7)'deki minimizasyon problemini çalıştılar.

$$\min \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(|\nabla u|)} dx \quad (7)$$

Bu model değişken üslü bir modeldir. Bu model TV temelli ve izotropik difüzyonun kombinasyonunun yanı sıra hem izotropik hem de TV tabanlı difüzyonun faydalı yanlarını birleştirir. Yayılma hızını üstel

sayıdan seçer ve daha sonra merdiven çıkarma etkisini azaltır. Ancak p , $|\nabla u|$ 'ya bağlı olduğu için, enerji fonksiyonelinin alt yarı sürekliliğini oluşturmak zordur. Dolayısıyla matematiksel olarak çalışmak zordur. Boltt ve ark. L^1 veya L^2 norm terimiyle bu problemin [8]'de bir minimumlaştırıcıya sahip olduğunu kanıtladı.

Sonra Chen ve arkadaşları [11]'de yer alan aşağıdaki modeli önerdi;

$$\beta > 0 \text{ bir sabit ve } 1 < \alpha \leq q(x) \leq 2 \text{ için } \phi(x, r) := \begin{cases} \frac{1}{q(x)} |r|^{q(x)}, & |r| \leq \beta \\ |r| - \frac{\beta q(x) - \beta^{q(x)}}{q(x)}, & |r| > \beta \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{olmak üzere} \quad \min_{u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \frac{1}{2\beta} \int_{\Omega} \left(\phi(x, |\nabla u|) + \frac{\lambda}{2} (u(x) - I(x))^2 \right) dx. \quad (9)$$

Chen ve arkadaşları tarafından [11]'de çalışılan modellemeye; $\lambda \geq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir bölge, p sınırlı ve Lipschitz sürekli bir fonksiyon olmak üzere $1 \leq p \leq 2$ için (4) minimizasyon probleminde ortaya çıkan izotropik difüzyon ($p=2$ durumu), toplam varyasyon (TV) temelli difüzyon ($p=1$ durumu) ve daha genel izotropik olmayan ($1 < p < 2$ durumu) difüzyon tiplerinin güçlü yanları birleştirilmektedir (Bkz. [1, 7 ve 19]).

Bu model gradient yeterince büyük olduğunda (yani, muhtemel kenarlarda) sadece TV-temelli, gradientin sifıra yakın olduğu yerde (yani, homojen bölgelerde) izotropiktir. Ayrıca parçalı olarak pürüzsüz olabilen veya gürültü ile kenarlar arasındaki farkın ayırt edilmesinin zor olduğu bölgelerde anizotropik difüzyon ($1 < p < 2$) kullanılmaktadır. Chen ve arkadaşları $p = p(x)$ in görüntüdeki x yerine bağımlı olmasını sağladılar. Bu şekilde, her konumdaki difüzyonun yönü ve hızı yerel davranışa bağlıdır.

Chen ve arkadaşları (9) problemini $BV(\Omega)$ (Bounded Variation) uzayında çalıştılar. Deneysel sonuçlar, görüntünün restorasyonunda modelin etkililiğini göstermektedir.

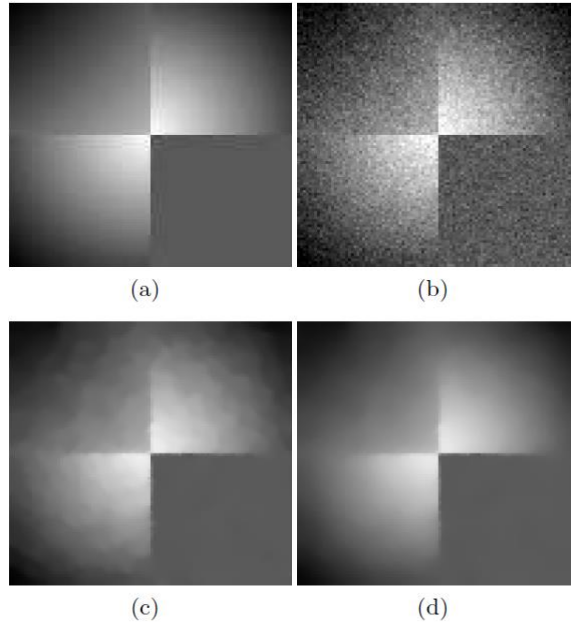
Yukarıdaki Chen ve arkadaşlarının modellemesinden esinlenerek Li ve arkadaşları $p(x) = 1 + g(x)$ ve $g(x) = \frac{1}{1 + k|\nabla G_{\sigma} * f(x)|}$ olmak üzere

$$\min_{u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \left\{ E_{p(x)}(u) \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} + \frac{\lambda}{2} (u - f)^2 \right) dx \right\} \quad (10)$$

modelini önerdiler. Li ve ark., [11]'de Chen ve ark. tarafından yapılan çalışmayı [20]'de $p^- = \inf p > 1$ durumu için incelediler. Li ve arkadaşları (10) problemini değişken üslü $W^{1,p(x)}$ Sobolev uzayında çalıştılar. Makalelerinin sonunda, sonuçlarını $p^- = 1$ 'e genişletmenin mümkün olup olmadığını soruyorlar. Bu soruya ilişkin Harjulehto ve ark. tarafından [16] makalesinde bir çözüm önerilmektedir.

3.2.5. İmaj İyileştirme Modellemeleri İle Sayısal Çözümler ve Deneysel Sonuçlarının Karşılaştırılması (Comparison of Image Processing Modeling with Numerical Methods and Experimental Results)

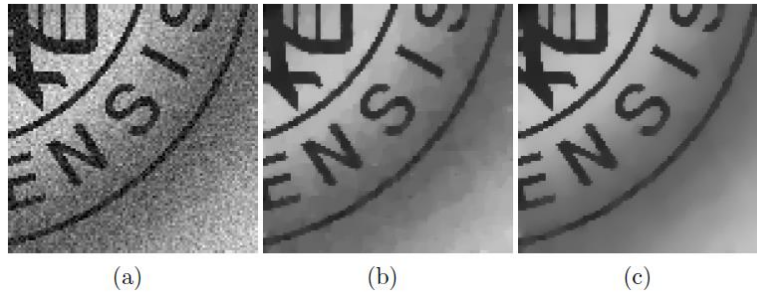
Li ve arkadaşlarının [20]'de önerdiği modelleme ile elde edilen görüntülerle ROF model ile elde edilen görüntülere ilişkin gözlemler aşağıdaki 2., 3., 4. şekillerde verilmiştir.



Şekil 2. a)Gerçek görüntü, b)Gürültülü görüntü, c)Rof medeli ile restore edilmiş görüntü, d)Önerilen model ile restore edilmiş görüntü [20]

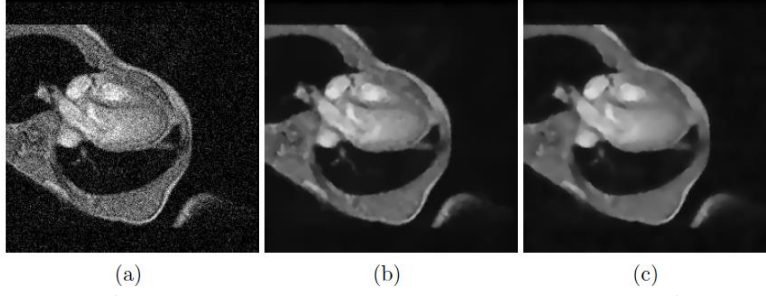
(Figure 2. a)The true image, b)The noisy image, c) The restoration result by the ROF model, d) The restoration result by the proposed model [20])

Her iki sonuçta da merkez çizgilerdeki kenarlar korunmuştur. Ancak, Şekil 2 (d)'de merdiven çıkarma etkisi başarıyla azalmasına rağmen Şekil 2 (c)'de merdiven çıkarma etkisi pürüzsüz bölgelerde açıktır.



Şekil 3. a) Gürültülü görüntü, b) ROF medeli ile restore edilmiş görüntü, c) Önerilen model ile restore edilmiş görüntü [20]
(Figure 3. a) The noisy image, b) The restoration result by the ROF model, c) The restoration result by the proposed model [20])

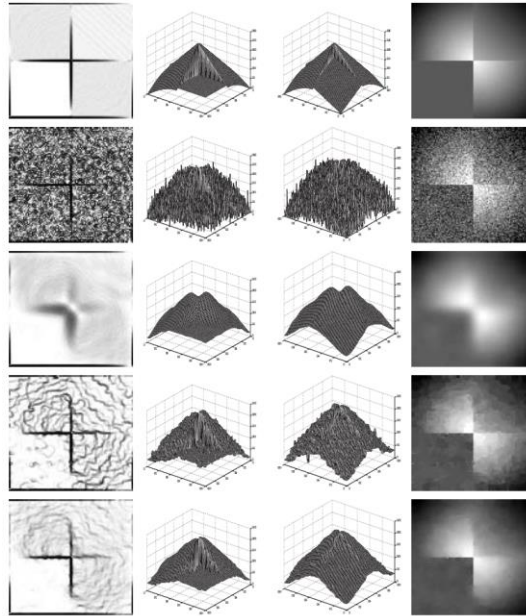
Her iki sonuçta da karakterlerin kenarları korunmuştur. Önerilen model tarafından restore edildiğinde neredeyse hiç merdiven etkisi gözükmemektedir.



Şekil 4. a) Kalbin gürültülü MRI görüntüsü, b) Kalbin Rof medeli ile restore edilmiş görüntüsü, c) Kalbin Önerilen model ile restore edilmiş görüntüsü [20]

(Figure 4. Noisy MRI image of a heart, b) The restoration result by the ROF model, c) The restoration result by the proposed model [20])

Organ yüzeyinin pürüzsüz olduğu Şekil 4 (c)'de merdiven etkisi neredeyse hiç görülmemektedir. Ancak merdiven etkisi, Şekil 4 (b)'daki organ yüzeyi üzerinde barizdir. Chen ve arkadaşlarının [11]'de önerdiği modelleme ile elde edilen görüntülerle ROF modeli ve izotropik difüzyon ile elde edilen görüntülere ilişkin gözlemler aşağıdaki şekil 5'de verilmiştir.



Şekil 5. En üst Satır: Gerçek görüntü, 2. Satır: Gürültülü görüntü, 3. Satır: İzotropik difüzyon kullanarak restore edilen görüntü, 4. Satır: TV tabanlı difüzyon kullanarak restore edilen görüntü, 5. Satır: Chen ve arkadaşları tarafından önerilen model kullanarak restore edilen görüntü [11]

(Figure 5. Top row: The true image, Second row: Image + noise, Third row: Reconstruction using isotropic diffusion, Fourth row: reconstruction using TV-based diffusion, Fifth row: reconstruction using the proposed model [11])

İzotropik difüzyon pürüzsüz bölgeleri yeniden yapılandırır, ancak kenarları ciddi derecede bulanıktır. TV tabanlı difüzyon keskin kenarları yeniden oluşturur, ancak merdiven çıkarma etkisi açıktır. Önerilen model, TV tabanlı difüzyon kadar keskin kenarları yeniden

yapılandırır, pürüzsüz bölgeleri izotropik difüzyon kadar etkili bir şekilde tekrar oluşturur.

3.3. Değişken Üslü Lebesgue ve Sobolev Uzaylarda Isı Problemleri İle İlgili Uygulamalar (The Applications Related to Heat Problems in Variable Exponent Lebesgue and Sobolev Spaces)

Liu Bingchen and Fengjie Li [21] makalesinde, lokalize reaksiyonlarla birleştirilmiş ve değişken üslü n -bileşenli ısı denklemleri için blow-up çözümleri sunulmaktadır. Bu makalede; $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N: |x| < R\}$, $p_i(x), q_i(x) \geq, \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ şartını sağlayan değişken üs, T klasik çözümlerin maksimum varoluş zamanı olmak üzere standart olmayan büyüme koşullu

$$\begin{cases} (u_1)_t = \Delta u_1 + u_1^{p_1(x)}(0,t)u_2^{q_2(x)}(0,t), & (x,t) \in B_R \times (0,T) \\ (u_2)_t = \Delta u_2 + u_2^{p_2(x)}(0,t)u_3^{q_3(x)}(0,t), & (x,t) \in B_R \times (0,T) \\ \vdots \\ (u_n)_t = \Delta u_n + u_n^{p_n(x)}(0,t)u_1^{q_1(x)}(0,t), & (x,t) \in B_R \times (0,T) \\ u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0, & (x,t) \in \partial B_R \times (0,T) \\ u_i(x,0) = u_{i,0}(x), & i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2, x \in B_R \end{cases}$$

ısı denklemleri çalışıldı.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME (CONCLUSION AND EVALUATION)

Yapılan bu derleme çalışmada yukarıda atıfta bulunulan yazarların Standard olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerin uygulama alanlarına ilişkin mühendislik çalışmalarının analizi yapılmıştır. Bu çalışmalar sonucunda İmaj iyileştirme üzerine klasik uzaylar ile değişken üslü uzaylarda uygulanan farklı yöntemlerin avantaj ve dezavantajları belirtilerek değişken üslü uzayların önemi vurgulanmıştır. Ayrıca Değişken üslü uzaylarda ER akışkanlarla, ısı denklemleri ile ilgili yapılan çalışmalara da yer vererek değişken üslü uzayların kullanım sahaları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

NOT (NOTICE)

Bu çalışma, 21-23 Eylül 2017 tarihleri arasında Bayburt (Türkiye)'de düzenlenen International Conference on Advanced Engineering Technologies (ICADET 2017) Sempozyumunda sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] Aboulaich, R., Meskine, D. and Souissi, A., (2008). New Diffusion Models in Image Processing. Computers&Mathematics with Applications, Volume:56, Number:4, pp:874-882.
- [2] Acerbi, E. and Mingione, G., (2002). Regularity Results for Stationary Electrorheological Fluids. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume:164, Number:3, pp:213-259.
- [3] Antontsev, S.N. and Shmarev, S.I., (2005). On Localization of Solutions of Elliptic Equations with Nonhomogeneous Anisotropic Degeneracy. Siberian Mathematical Journal, Volume:46, Number:5, pp:765-782.
- [4] Atkin, R.J., Shi, X. and Bullough, W.A., (1991). Solutions of the Constitutive Equations for the Flow of an Electrorheological Fluid in Radial Configurations. Journal of Rheology, Volume:35, Number:7, pp:1441-1461.
- [5] Ayazoglu, R. and Ekinoglu, I., (2016). Electrorheological Fluids Equations Involving Variable Exponent with Dependence on the Gradient via Mountain Pass Techniques. Numerical Functional Analysis and Optimization, Volume:37, Number:9, pp: 1144-1157.



- [6] Bailey, P., Gillies, D.G., Heyes, D.M. and Sutcliffe, L.H., (1989). Experimental and Simulation Studies of Electrorheology. *Molecular Simulation*, Volume:4, Number:1-3, pp: 137-151.
- [7] Blomgren, P., Chan, T. F., Mulet, P. and Wong, C. K., (1997). Total Variation Image Restoration: Numerical Methods and Extensions. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, Vol. III, IEEE, Los Alamitos, CA, pp: 384-387.
- [8] Bollt, E.M., Chartrand, R., Esedoglu, S., Schultz P. and Vixie, K.R., (2009). Graduated Adaptive Image Denoising: Local Compromise between Total Variation and Isotropic Diffusion. *Advances in Computational Mathematics*, Volume:31, Number:1, pp: 61-85.
- [9] Bonnecaze, R.T. and Brady, J.F., (1992). Yield Stresses in Electrorheological Fluids. *Journal of Rheology*, Volume:36, Number:1, pp: 73-115.
- [10] Chambolle, A. and Lions, P. L., (1997). Image Recovery via Total Variation Minimization and Related Problems. *Numerische Mathematik*, Volume:76, Number:2, pp: 167-188.
- [11] Chen, Y., Levine, S., Rao, M., (2006). Variable Exponent, Linear Growth Functionals in Image Restoration. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Volume:66, Number:4, pp: 1383-1406.
- [12] Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P. and Růžička, M., (2011). *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Springer.
- [13] Grady, N., (2009). *Functions of Bounded Variation*. Dostopno prek: <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/grady.pdf> (Dostopano: 7.2.2017).
- [14] Halsey, T.C. and Will, T., (1990). Structure of Electrorheological Fluids. *Physical Review Letters*, Volume:65, Number:22, pp: 2820.
- [15] Halsey, T.C., (1992). Electrorheological Fluids. *Science*, Volume:258, Number:5083, pp: 761-766.
- [16] Harjulehto, P., Hästö, P., Latvala, V. and Toivanen, O., (2013). Critical Variable Exponent Functionals in Image Restoration. *Applied Mathematics Letters*, Volume:26, Number:1, pp: 56-60.
- [17] Klingenberg, D.J., Frank, V.S. and Zukoski, C.F., (1991). The Small Shear Rate Response of Electrorheological Suspensions. II. Extension Beyond the Point-Dipole Limit. *The Journal of Chemical Physics*, Volume:94, Number:9, pp: 6170-6178.
- [18] Kováčik, O., Rákosnik, J., (1991). On the Space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$. *Czechoslovak Math. J.*, Volume:41, Number:4, pp: 592-618.
- [19] Levine, S., (2005). An Adaptive Variational Model for Image Decomposition, in: *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*. Springer-Verlag, LCNS No. 3757, pp: 382-397.
- [20] Li, F., Li, Z. and Pi, L., (2010). Variable Exponent Functionals in Image Restoration. *Applied Mathematics and Computation*, Volume:216, Number:3, pp: 870-882.
- [21] Liu, B. and Li, F., (2012). Non-Simultaneous Blowup in Heat Equations with Nonstandard Growth Conditions. *Journal of Differential Equations*, Volume:252, Number:8, pp: 4481-4502.
- [22] Mihăilescu, M., (2006). Elliptic Problems in Variable Exponent Spaces. *Bulletin Australian Mathematical Society*, Volume:74, Number:2, pp: 197-206.
- [23] Mihăilescu, M., Rădulescu, V., (2006). A Multiplicity Result for a Nonlinear Degenerate Problem Arising in the Theory of



- Electrorheological Fluids. In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Volume:462, Number:2073, pp: 2625-2641.
- [24] Nikolova, M., (2004). Weakly Constrained Minimization: Application to the Estimation of Images and Signals Involving Constant Regions. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Volume: 21, Number:2, pp: 155-175.
- [25] Orlicz, W., (1931). Uber Konjugierte Exponentenfolgen. *Studia Math.*, Volume: 3, Number: 1, pp: 200-212.
- [26] Parthasarathy, M. and Klingenberg, D.J., (1996). Electrorheology: Mechanisms and Models. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, Volume:17, Number:2, pp: 57-103.
- [27] Rajagopal, K.R. and Alan Wineman, S., (1992). Flow of Electrorheological Materials. *Acta Mechanica*, Volume:91, Number:1-2, pp: 57-75.
- [28] Rajagopal, K.R., Yalamanchili, R.C. and Wineman, A.S., (1994). Modeling Electrorheological Materials through Mixture Theory. *International Journal of Engineering Science*, Volume:32, Number:3, pp: 481-500.
- [29] Rajagopal, K.R. and Růžička, M., (1996). On the Modeling of Electrorheological Materials. *Mechanics Research Communications*, Volume:23, Number:4, pp: 401-407.
- [30] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E., (1992). Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Nonlinear Phenomena*, Volume:60, Number:1-4, pp: 259-268.
- [31] Růžička, M., (2000). *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag.
- [32] Sharapudinov, I. I., (1979). Topology of the Space $L^{p(t)}[0,1]$. *Matematicheskie Zametki*, Volume:26, Number:4, pp: 613-632.
- [33] Strong, D.M. and Chan, T.F., (1996). Spatially and Scale Adaptive Total Variation Based Regularization and Anisotropic Diffusion in Image Processing. Technical Report CAM96-46, University of California, Los Angeles, CA, Available online at <http://www.math.ucla.edu/applied/cam/index.html>.
- [34] Tsenov, I.V., (1961). Generalization of the Problem of Best Approximation of a Function in the Space L^S . *Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ.*, Volume: 7, pp: 25-37.
- [35] Whittle, M., (1990). Computer Simulation of an Electrorheological Fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Volume:37, Number:2-3, pp: 233-263.
- [36] Wineman, A. S. and Rajagopal, K.R., (1995). On Constitutive Equations for Electrorheological Materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Volume:7, Number:1, pp: 1-22.
- [37] Winslow, W. M., (1949). Induced Fibrillation of Suspensions. *Journal of Applied Physics*, Volume:20, Number:12, pp: 1137-1140
- [38] Zhikov, V. V. E., (1987). Averaging of Functionals of the Calculus of Variations and Elasticity Theory. *Izvestiya: Mathematics*, Volume: 29, Number: 1, pp: 33-36.