



ISSN:1306-3111

e-Journal of New World Sciences Academy
2011, Volume: 6, Number: 1, Article Number: 1A0148

ENGINEERING SCIENCES

Received: October 2010

Accepted: January 2011

Series : 1A

ISSN : 1308-7231

© 2010 www.newwsa.com

Nizami Gasilov

Şahin Emrah Amrahov

Afet Golayoğlu Fatullayev

Baskent University

gasilov@baskent.edu.tr

Ankara-Turkey

BİR TİP BULANIK DOĞRUSAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada; başlangıç değeri, alfa-kesitleri elipsoitler olan bir bulanık küme ile verilen ama dinamiği kesin (belirli) olan bulanık doğrusal diferansiyel denklem sistemi (BDDDS) incelenmiştir. Bu güne kadar yapılan araştırmalarda başlangıç değeri, bulanık sayılar vektörü ile verilen BDDDS incelenmiştir. Bu da başlangıç vektörün her bir bileşeninin bağımsız belirsizliğe sahip olması demektir. Böyle bir varsayım, esnek hesaplamaları önemli ölçüde kolaylaştırmaktadır, fakat bulanık modelde ciddi boyutlarda veri kaybına veya veri fazlalığına neden olmaktadır. Örneğin, 2 boyutlu durumda elipsin en uygun dikdörtgenle yaklaştırılması, incelenmesi gereken bazı bölgeleri dışarıda bırakacaktır ve tersine. Bu çalışmada, başlangıç değeri bulanık elipsoit olan BDDDS için çözüm yöntemi önerilmiştir. Yöntem, doğrusal dönüşümün bir elipsoidi, başka bir elipsoide dönüştürmesi gerçeğine dayanmaktadır. Her bir zaman anında sistemin çözümü, alfa-kesitleri iç içe konumlanmış elipsoitler olan bulanık bir küme oluşturmaktadır. Yöntem, çeşitli örnekler üzerinde açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Doğrusal Diferansiyel Denklem Sistemi, Bulanık Küme, Doğrusal Dönüşüm

SOLVING A TYPE OF FUZZY LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

In this study, a type of fuzzy linear systems of differential equations (FLSDE) is analyzed. The dynamics of the system is definite (crisp) but initial value is a fuzzy set the alpha-cuts of which are ellipsoids. In the researches made up to now, FLSDE with initial value given as a vector of fuzzy numbers is analyzed. It means that each component of the initial vector has independent uncertainty. Such an assumption simplifies soft calculations, but it causes either serious data loss or excessive data handling in fuzzy model. For example, in two-dimensional case, approximation of an ellipse with appropriate rectangle will leave out the regions that are necessary to examine and vice versa. In this study, a method of solution for FLSDE with initial value given as a fuzzy ellipsoid is suggested. The method is based on the fact that a linear transformation maps an ellipsoid to another ellipsoid. At any time the system's solution constitutes a fuzzy set, alpha-cuts of which are nested ellipsoids. The suggested method was explained on different examples.

Keywords: Fuzzy Linear System of Differential Equations, Fuzzy Set, Linear Transformation

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Bulanık türev kavramı Chang ve Zadeh tarafından verilmiş [4], Dubois ve Prade tarafından geliştirilmiştir [5]. Bulanık diferansiyel denklem (BDD) kavramını ise, 1987 yılında Kandel ve Byatt [14-15] kullanmışlardır. Daha sonralar bulanık türev için çeşitli tanımlar ortaya atılmıştır. Bu tanımlardan ilk ve en yaygın olanı Hukuhara türevidir [9]. Puri ve Ralescu bu kavramı genelleştirmişler [16] ve genelleştirilmiş yaklaşım Kaleva [11 ve 12] tarafından araştırılmıştır. Hukuhara türevinin en önemli dezavantajı, zamanla bulanıklığın artması ve kesin çözümden çok uzak çözümlerin elde edilmesidir [13]. Seikkala [17], Hukuhara türevinin bu dezavantajını ortadan kaldırmak için daha genel bir bulanık türev kavramı önermiş ama bu kavramın Dubois ve Prade [5] tarafından geliştirilmiş kavramın aynısı olduğu anlaşılmıştır. Bulanık sayı değerli fonksiyonların türev kavramını kullanmaktan kaçınmak için Hüllermeier [10] BDD'leri diferansiyel dahillemeler ailesi gibi incelemiştir. Buckley ve b. [2 ve 3] bulanık doğrusal diferansiyel denklem sistemleri (BDDDS) için başlangıç değer probleminin çok genel bir formülasyonunu vermişler. Onlar önce kesin çözümü buluyorlar, sonra ise bu çözümü bulanıklaştırarak sistemi sağlayıp sağlamadığını inceliyorlar.

Bu çalışmada, biz, Buckley ve b. [2 ve 3] formülasyonuna uyan BDDDS inceliyoruz. Bu formülasyonda BDDDS'nin katsayıları reel sayılardır, sistemin çözümlerinden her biri kesin (belirli) fonksiyondur. Bulanıklık ise, sadece başlangıç değerdedir. [2 ve 3] çalışmalarından farklı olarak biz başlangıç değeri bulanık sayılar vektörü olarak almıyoruz. Bunun yerine başlangıç değerinin bulanık bir küme olduğunu varsayıyoruz. Diğer bir fark ise, BDDDS'nin çözümü anlayışlıdır. Bizim yaklaşımımıza göre çözüm, her birinin belli bir olabilirliği olan vektör-fonksiyonların bulanık kümesidir. Çalışmada, hesaplamaları kolaylaştırmak için başlangıç bulanık küme olarak bulanık elips alınmıştır. Aslında, önerilen çözüm yöntemi tüm bulanık kümeler için geçerlidir. Yöntem, doğrusal dönüşümlerin özelliklerine dayanan geometrik yaklaşım üzerine geliştirilmiştir. Bu yaklaşım ilk defa [6 ve 7]'de bulanık doğrusal cebirsel denklem sistemleri için, sonra ise [8]'de BDDDS için uygulanmıştır. [8]'de $X(0)$ başlangıç değerinin, bulanık sayılar vektörü olduğu durum incelenmiştir: $X(0) \in E^1 \times E^1 \times \dots \times E^1$. Bu durumda başlangıç vektörün her bileşeni bir bulanık sayıdır ve kendi (diğer bileşenlerinkinden bağımsız) üyelik fonksiyonuna sahiptir. [8]'den farklı olarak, sunulan bu çalışmada $X(0) \in E^n$ durumuna, yani, başlangıç değerinin, R^n 'den olan vektörlerin bir bulanık kümesi olduğu duruma bakılmıştır. (Bu durumda tek üyelik fonksiyonu vardır ve başlangıç vektörün bileşenleri birbirlerinden bağımsız değildir). Uygulamada doğal olarak ortaya çıkan bu durum şimdiye kadar araştırmacılar tarafından incelenmemiştir.

Bu çalışma, Girişle birlikte 5 bölümden oluşmaktadır. 2. bölümde BDDDS için başlangıç değer problemi tanımlanmıştır. 3. bölümde Çözüm yöntemi anlatılmış, 4. bölümde Örnekler çözülmüştür. 5. bölüm ise Sonuçlardan oluşmaktadır.

2. BULANIK DOĞRUSAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ (FUZZY LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS)

a_{ij} , ($1 \leq i, j \leq n$) reel sayılar, $f_i(t)$, ($1 \leq i \leq n$) verilen reel değerli fonksiyonlar olsunlar.

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (1)$$

sistemine,

$$(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = \tilde{B} \quad (2)$$

bulanık başlangıç değeri ile birlikte, bulanık doğrusal diferansiyel denklem sistemi (BDDDS) denir. Burada \tilde{B} , R^n den olan vektörlerin bir bulanık kümesidir.

(1)-(2) problemi matris notasyonu kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{cases} X' = AX + F(t) \\ X(t_0) = \tilde{B} \end{cases} \quad (3)$$

Burada $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ boyutlu reel matris, $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^T$ reel vektör-fonksiyon ve \tilde{B} bir bulanık kümedir.

Eğer diferansiyel denklemler, bir cismin hareket denklemleri olarak düşünülürse, bulanık başlangıç değeri, t_0 anında cismin konumu üzerine bir belirsizlik olduğuna işaret etmektedir. Aşağıda, genelliği bozmadan $t_0 = 0$ alınmıştır.

(1)-(2) (veya (3)) probleminin çözümü olarak neyi kastettiğimizi açıklayalım. Başlangıç bölgeden herhangi bir P noktasını alalım: $P \in B$. $\mu_{\tilde{B}}(P) = \alpha$ olsun. P başlangıç değerine sahip olan ve (1) sistemini sağlayan tek $x(t)$ vektör-fonksiyonu vardır. Bu $x(t)$ vektör-fonksiyonuna, (1)-(2) probleminin α olabilirlikli çözümü diyeceğiz. Böyle vektör-fonksiyonlardan oluşan \tilde{X} bulanık kümesi, problemin çözümünü belirleyecektir. \tilde{X} kümesi, vektör-fonksiyonların bulanık demeti olarak da yorumlanabilir.

Bu çalışmada $\mu_{\tilde{B}}(x) = \max \{ 1 - \sqrt{(x - x_c)^T S (x - x_c)}; 0 \}$ alınacaktır. Burada S , verilen pozitif tanımlı simetrik matristir. \tilde{B} bulanık kümesi, uzayda, α -kesitleri iç-içe konumlanmış eşmerkezli elipsoitler (özel durumda, küreler) olan bir bölge oluşturmaktadır. x_c vektörü, bölgenin merkezini belirlemektedir.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ (METHOD OF SOLUTION)

(3) probleminin, vektör-fonksiyonların bulanık kümesi biçiminde çözümünün nasıl elde edilebileceğini açıklayalım. Başlangıç değeri, $\tilde{B} = b_{cr} + \tilde{b}$ şeklinde gösterelim. Burada, olabilirliği 1 olan $b_{cr} = x_c$ vektörü, \tilde{B} bulanık bölgesinin tepesini (kesin (belirli) kısmını); \tilde{b} ise, tepesi orijinde olan belirsizliğini göstermektedir. \tilde{b} 'nin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{b}}(x) = \max \{ 1 - \sqrt{x^T S x}; 0 \}$ dır. (3) sisteminin çözümünün, $\tilde{X}(t) = x_{cr}(t) + \tilde{x}(t)$ (kesin çözüm + belirsizlik) biçiminde olduğu kolaylıkla görülebilir. Burada $x_{cr}(t)$ vektör-fonksiyonu,

$$\begin{cases} X' = AX + F(t) \\ X(0) = b_{cr} \end{cases}$$

homojen olmayan kesin (belirli) problemin çözümüdür; $\tilde{x}(t)$ ise,

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \tilde{b} \end{cases}$$

homojen sisteminin, bulanık başlangıç değere karşılık çözümüdür.

Eğer sistem (3) bir cismin hareketini ifade ediyorsa, $x_{cr}(t)$, ana yörünge olarak yorumlanabilir. $x_{cr}(t)$ çözümü, analitik veya sayısal yöntemlerin yardımı ile hesaplanabilir. Böylelikle, verilen sistem (3)'ün

çözümü, başlangıç değeri bulanık olan homojen sistemin çözülmesine indirgenmiştir.

Çözüm, aşağıda listelenen bilgilere dayanarak elde edilecektir.

- Başlangıç değerin belirlediği $\tilde{\mathbf{b}}$ kümesi, R^n uzayında bir bulanık bölge oluşturmaktadır. Bu bölgenin tepesi orijindedir, sınırı ise, elipsoit şeklindedir. Bölgenin α kesitleri, iç-içe yerleşen elipsoitler oluşturmaktadır.

Doğrusal dönüşümler üzerine aşağıdaki bilgiler kullanılacaktır [1]:

- Bir doğrusal dönüşüm, orijini (sıfır vektörünü), orijine (sıfır vektörüne) dönüştürür.
- Bir doğrusal dönüşüm, bir elipsoidi, başka bir elipsoide dönüştürür.

Sonraki üç özellik,

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{v} \end{cases} \quad (4)$$

başlangıç değer problemi üzerinedir:

- Çözümün varlığı ve tekliği teoremine göre P ve Q gibi iki farklı başlangıç noktasından çıkan çözüm eğrileri hiç bir $t=t_*$ zaman anında kesişmezler.
- Başlangıç değer probleminin çözümü $\mathbf{x}(t)=e^{At}\mathbf{v}$ biçimindedir.
- Bir $t=t_*$ zamanı için $\mathbf{x}(t_*)=e^{At_*}\mathbf{x}(0)=M\mathbf{x}(0)$, burada M sabit değerli, terslenebilir bir matristir. Dolayısıyla, bir $t=t_*$ zaman anında çözüm fonksiyonunun değeri, matrisi M olan bir doğrusal dönüşüm üzerine belirlenmektedir.

Yukarıda listelenmiş 1-6 bilgilerden yola çıkarak aşağıdaki sonuca varılabilir: başlangıç değerleri, bir elipsoit üzerinde olan çözüm eğrilerinin bir $t=t_*$ zaman anına karşılık gelen noktaları da bir elipsoit oluşturacaktır.

$n=2$ durumunda elipsoit, bir elips (küre ise, bir daire) anlamına gelmektedir. Yukarıdaki bilgilere göre, çözüm eğrileri, xyt koordinat uzayında t yönünde ilerleyen iç-içe yerleşen yüzeyler oluşturur. Bu yüzeylerin, $t=t_*$ düzlemi ile kesiti iç-içe yerleşen elipsler şeklindedir.

xy koordinat düzleminde çözümün davranışını aşağıdaki gibi yorumlayabiliriz. α -kesitleri, eşmerkezli elipsler olan ve hareket eden bir bölge düşünelim. Hareket sırasında bu bölgenin konumu, boyutları ve yönü değişebilir; ama her bir zaman anında α -kesitleri, eşmerkezli elipsler olarak kalacaktır. Bölgenin tepe noktasının (merkezinin) hareketi, kesin çözüm ile belirlenir.

Yukarıda, n boyutlu durumda çözüm kümesinin nasıl olduğu niteliksel olarak açıklanmıştır. Çözüm kümesi ve onun α -kesitleri aşağıdaki formüllerle ifade edilebilirler:

$$X = \left\{ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{cr}(t) + e^{At} \mathbf{p} \mid \mathbf{p}^T S \mathbf{p} \leq 1 \right\}; \quad X_\alpha = \left\{ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{cr}(t) + e^{At} \mathbf{p} \mid \mathbf{p}^T S \mathbf{p} \leq (1-\alpha)^2 \right\} \quad (5)$$

Bir t anında, çözümün değerleri bir elipsoit oluşturmaktadır:

$$X(t) = \left\{ \mathbf{y} \mid (\mathbf{y} - \mathbf{x}_{cr}(t))^T e^{-At} S e^{-At} (\mathbf{y} - \mathbf{x}_{cr}(t)) \leq 1 \right\};$$

$$(X(t))_\alpha = \left\{ \mathbf{y} \mid (\mathbf{y} - \mathbf{x}_{cr}(t))^T e^{-At} S e^{-At} (\mathbf{y} - \mathbf{x}_{cr}(t)) \leq (1-\alpha)^2 \right\}$$

Not: $(X(t))_\alpha$ elipsoidi, $X(t)$ elipsoidine benzerdir (benzerlik katsayısı $1-\alpha$).

4. ÖRNEKLER (EXAMPLES)

• Örnek 1.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5t^2 - 15t - 25 \\ 10t^2 - 10t - 40 \end{bmatrix} \quad (6)$$

sistemini,

$$\mu_{X(0)}(x, y) = \max \left\{ 1 - \sqrt{\left(\frac{x-15}{1}\right)^2 + \left(\frac{y-6}{2}\right)^2}; 0 \right\}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen bulanık başlangıç değeri için çözünüz.

$\alpha=0.4$ değeri için çözümün α -kesitini bulunuz.

• Çözüm:

Başlangıç değeri, koordinat düzleminde bir bulanık bölge oluşturmaktadır. Bu bölge, $(x, y)=(15, 6)$ merkezli, x ve y eksenleri boyunca yarıçapları uygun olarak 1 ve 2 olan elips şeklindedir. Bölgenin sınırı ($t=0$ anındaki dış elips) ve $\alpha=0.4$ için α -kesiti (iç elips), Şekil 1'de gösterilmiştir. Bölgenin, $\mathbf{b}_{cr}=(15, 6)^T$ vektörü ile belirlenen tepesi, nokta ile işaretlenmiştir.

Verilen problemin çözümü 2 adıma gerçekleştirilir:

- Homojen olmayan sistemin kesin başlangıç değere karşılık gelen kesin çözümü belirlenir.

(6) sisteminin, $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix}$ başlangıç değerine karşılık çözümü:

$$\begin{cases} x_{cr}(t) = 5(t+2) + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{14}{3}e^{2t} \\ y_{cr}(t) = 5t^2 + \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{14}{3}e^{2t} \end{cases}$$

İlgili grafik, Şekil 1'de kalın çizgi ile gösterilmiştir.

- Homojen sistemin, tepesi orijinde olan bulanık başlangıç değere karşılık bulanık çözümü araştırılır. Yani,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (7)$$

sistemi,

$$\mu_{X(0)}(x, y) = \max \left\{ 1 - \sqrt{\left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2}; 0 \right\} \quad (8)$$

üyelik fonksiyonu ile verilen bulanık başlangıç değeri için çözülür.

(8) formülü ile tanımlanan orijin merkezli elips, $t=0$ anındaki dış elipsin (Şekil 1), $-\mathbf{b}_{cr}$ vektörü kadar ötelenmesiyle elde edilir.

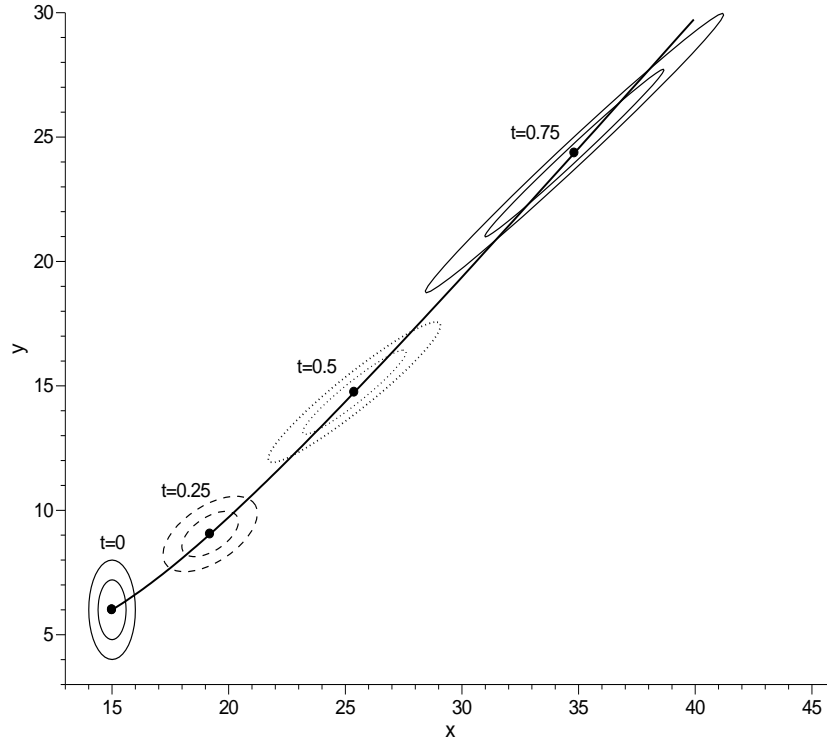
(7) sistemin genel çözümü:

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} \\ y(t) = 4c_1e^{-t} + c_2e^{2t} \end{cases}$$

$x(0)=a$, $y(0)=b$ başlangıç değerlerine karşılık sabitlerin ilgili değerleri:

$c_1=(-a+b)/3$ ve $c_2=(4a-b)/3$ olarak belirlenir.

Bulanık başlangıç değerinin α -kesitleri, benzer eşmerkezli elipsler olduğundan çözümün bir α -kesiti, geometrik benzerlikten bulunabilir ve ek hesaplamalar gerektirmiyor (Şekil 1).



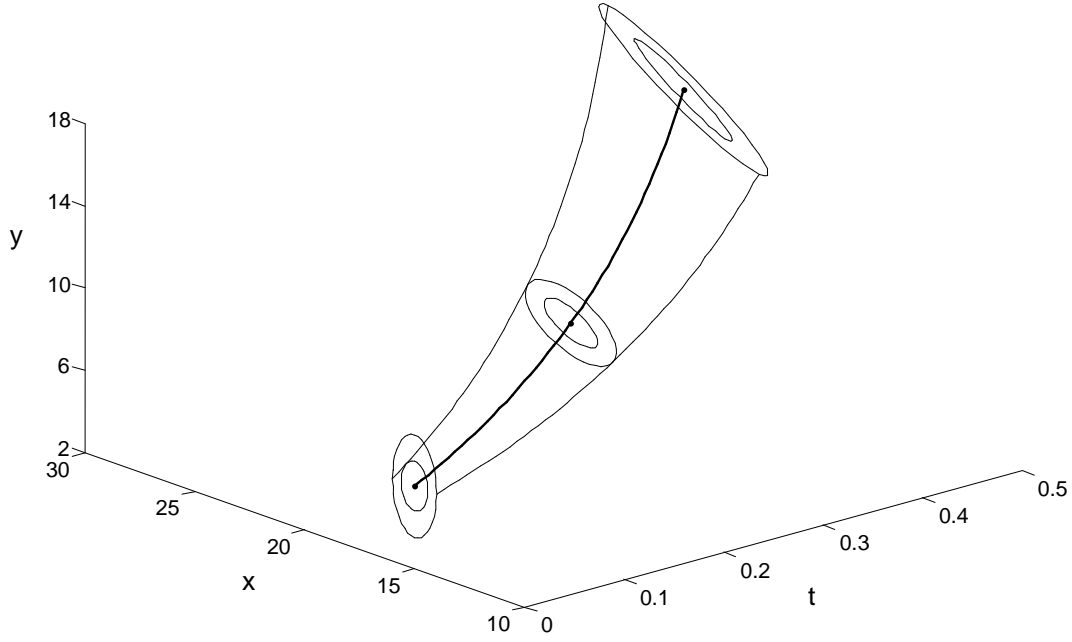
Şekil 1. $t=0$ anında başlangıç değerinin oluşturduğu bulanık bölgenin sınırı (dış elips) ve $\alpha=0.4$ -kesiti (iç elips) sürekli çizgilerle resimlendirilmiştir. $t=0.25$ ve $t=0.5$ zaman anlarında çözümün değerlerinin oluşturduğu bulanık bölgelerin elips şeklinde olan sınırları, uygun olarak, kesik ve noktalı çizgilerle gösterilmiştir. Kesin çözüm, kalın çizgi ile resimlendirilmiştir

(Figure 1. Outer and inner ellipses at time $t=0$ depict the boundaries of the fuzzy regions formed by the initial value and its $\alpha=0.4$ -cut, respectively. Dashed and dotted ellipses are the boundaries of the fuzzy region, corresponding to the solution at times $t=0.25$ and $t=0.5$, respectively. The crisp solution is depicted by thick line)

xy -koordinat uzayında, çözüm eğrileri iç içe yüzeyler oluşturmaktadır (Şekil 2). Bu yüzeylerin, $t=t_*$ düzlemi ile kesitleri iç içe elipslerdir.

\tilde{X} çözüm kümesinin α -kesitleri için formül, (5)'ten elde edilebilir:

$$X_\alpha = \left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (15(t+2) + (1-a+b)e^{-t} + (14+4a-b)e^{2t})/3 \\ (15t^2 + 4(1-a+b)e^{-t} + (14+4a-b)e^{2t})/3 \end{bmatrix} \\ \left(\frac{a-15}{1} \right)^2 + \left(\frac{b-6}{2} \right)^2 &\leq (1-\alpha)^2 \end{aligned} \right\}$$



Şekil 2. Şekil 1'deki durumun, xyt -koordinat uzayında gösterimi
(Figure 2. The same as in Fig. 1, but in the xyt -coordinate space)

• **Örnek 2.**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 33t-13 \\ 15t-10 \end{bmatrix} \quad (9)$$

sistemini,

$$\mu_{X(0)}(x,y) = \max \left\{ 1 - \sqrt{\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2}; 0 \right\}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen bulanık başlangıç değer için çözüünüz.

• **Çözüm:**

Başlangıç değer, koordinat düzleminde $(x,y)=(-5,2)$ merkezli, yarıçapları 2 ve 3 olan bir bulanık elips oluşturmaktadır. Çözüm, Örnek 1'deki gibi elde edilecektir.

Önce, homojen olmayan sistem (9),

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ başlangıç değeri ile alınarak, kesin çözüm belirlenir:}$$

$$\begin{cases} x_{cr}(t) = 6t - 1 - e^{-t} - 3e^{-2t} \\ y_{cr}(t) = -3t + 5 - e^{-t} - 2e^{-2t} \end{cases}$$

Bu çözümün grafiği, Şekil 3'te kalın çizgiyle gösterilmiştir. Sonra, bulanık başlangıç değerli homojen sistem çözülür:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (10)$$

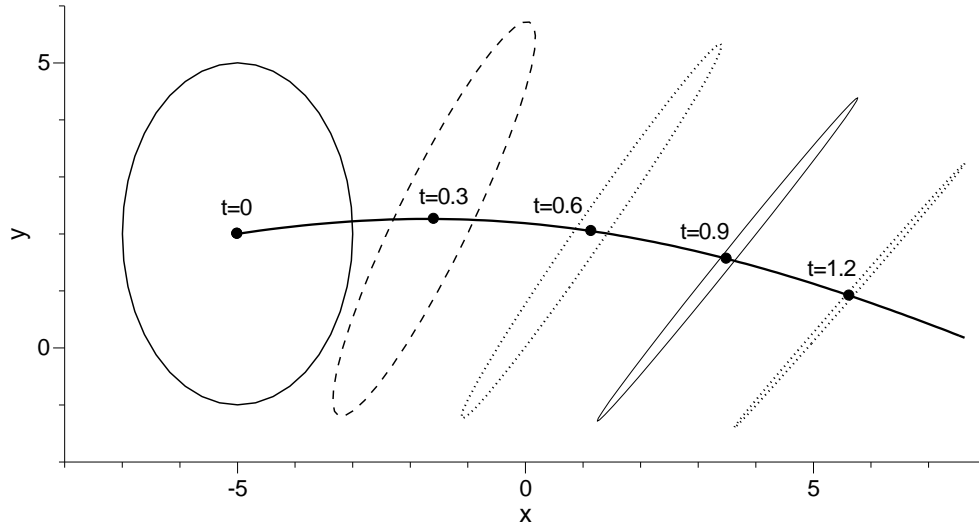
$$\mu_{X(0)}(x,y) = \max \left\{ 1 - \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2}; 0 \right\}$$

Bunun için homojen sistem (10)'un, $x(0)=a$, $y(0)=b$ başlangıç değerlerine karşılık çözümü belirlenir:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-2t} \\ y(t) = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-2t} \end{cases}$$

burada $c_1 = -2a + 3b$ ve $c_2 = a - b$.

Şekil 3'ten görüldüğü üzere, çözümün, t anında oluşturduğu bulanık küme, t arttıkça küçülüyor ve t , sonsuza yaklaştığında noktaya dönüşüyor.



Şekil 3. $t=0$ anındaki elips, başlangıç değerin oluşturduğu bulanık bölgenin sınırır. Kesik ve noktalı çizgilerle gösterilen elipsler, $t=0.3$ ve $t=0.6$ zaman anlarında çözümün değerlerinin oluşturduğu bulanık bölgelerin sınırlarıdır. Sağda yer alan elipsler ise, $t=0.9$ ve $t=1.2$ anlarındaki durumu yansıtmaktadır. Kalın çizgi, kesin çözümü göstermektedir (Figure 3. Ellipse at time $t=0$ is the boundary of the fuzzy region formed by the initial value. Dashed and dotted ellipses are the boundaries of the fuzzy region, corresponding to the solution at times $t=0.3$ and $t=0.6$, respectively. Following ellipses depict the situation at times $t=0.9$ and $t=1.2$. The thick line represents the crisp solution)

\tilde{X} çözüm kümesinin α -kesitleri aşağıdaki formülle ifade edilebilir:

$$X_\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} 6t - 1 + (-2a + 3b - 1)e^{-t} + 3(a - b - 1)e^{-2t} \\ -3t + 5 + (-2a + 3b - 1)e^{-t} + 2(a - b - 1)e^{-2t} \end{array} \right] \\ \left(\frac{a+5}{2} \right)^2 + \left(\frac{b-2}{3} \right)^2 \leq (1-\alpha)^2 \end{array} \right\}$$

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, başlangıç değeri bulanık elipsoitle verilen, ama katsayıları reel sayılar olan BDDDS için Cauchy probleminin çözüm yöntemi önerilmiştir. Yöntem, doğrusal dönüşümün özelliklerine dayanmıştır. Sistemin çözümü her bir zaman anında alfa-kesitleri iç içe konumlanmış elipsoitler olan bulanık bir küme ile ifade edilmiştir. Önerilen yaklaşım ve çözüm yöntemi, çeşitli örnekler üzerinde açıklanmıştır.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Anton, H. and Rorres, C., (2005). Elementary Linear Algebra, Applications Version: 9th Edition, John Wiley & Sons.
2. Buckley, J.J. and Feuring, T., (2000). Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume: 110, pp: 43-54.
3. Buckley, J.J., Feuring, T., and Hayashi, Y., (2002). Linear Systems of First Order Ordinary Differential Equations: Fuzzy Initial Conditions, *Soft Computing*, Volume: 6, pp: 415-421.

4. Chang, S.L. and Zadeh, L.A., (1972). On fuzzy mapping and control, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Volume: 2, pp: 330-340.
5. Dubois, D. and Prade, H., (1982). Towards Fuzzy Differential Calculus: Part 3, Differentiation, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume: 8, pp: 225-233.
6. Gasilov, N.A., Amrahov, S.G., Fatullayev, A.G., Karakaş, H.I., and Akin, Ö., (2009). Existence theorem for fuzzy number solutions of fuzzy linear systems. Proceedings. pp: 436-439. 1st International Fuzzy Systems Symposium (FUZZYSS'09). TOBB University of Economics and Technology. October 1-2, 2009. Ankara, Turkey. Edited by T. Dereli, A. Baykasoglu and I.B. Turksen.
7. Gasilov, N., Amrahov, S.G., Fatullayev, A.G., Karakaş, H.I., and Akin, Ö., (2009). A geometric approach to solve fuzzy linear systems. 11 pages. <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0910/0910.4049.pdf>
8. Gasilov, N., Amrahov, S.G., and Fatullayev, A.G., (2009). A geometric approach to solve fuzzy linear systems of differential equations. 13 pages. <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0910/0910.4307.pdf>
9. Hukuhara, M., (1967). Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe, *Funkcial. Ekvac.*, Volume: 10, pp: 205-223.
10. Hüllermeier, E., (1997). An approach to modelling and simulation of uncertain systems, *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Volume: 5, pp: 117-137.
11. Kaleva, O., (1987). Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume: 24, pp: 301-317.
12. Kaleva, O., (1990). The Cauchy Problem for Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume: 35, pp: 389-396.
13. Kaleva, O., (2006). A note on fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis*, Volume: 64, pp: 895-900.
14. Kandel, A. and Byatt, W.J., (1978). Fuzzy differential equations, in: *Proceedings of International Conference Cybernetics and Society*, Tokyo; pp: 1213-1216.
15. Kandel, A. and Byatt, W.J., (1980). Fuzzy processes, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume: 4, pp: 117-152.
16. Puri, M.L. and Ralescu, D.A., (1983). Differentials of fuzzy functions, *J. Mathematical Analysis and Applications*, Volume: 91, pp: 552-558.
17. Seikkala, S., (1987). On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume: 24, Number: 3, pp: 319-330.